§7.3 常见的保形变换举例

一、常见的~~保形~~线性变换举例

1. 上半平面到上半平面的线性变换

特点：(1) 三个有序实数 $x_1<x_2<x_3$ 对应 w 平面上三个有序实数 $w_1<w_2<w_3$，由保交比性有对应线性变换：

$$(z,x_1,x_2,x_3)=(w,w_1,w_2,w_3)$$

(2) 该变换满足两条：① $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，四个系数可以均为实数

② $w'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}>0$

类似地，上半平面到下半平面的线性变换：

(1) 若 $x_1<x_2<x_3$，则 $w_1>w_2>w_3$

(2) ① $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，四个系数可以均为实数

② $w'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}<0$

例 1　求上半平面到上半平面的线性变换 $w=w(z)$，满足 $w(i)=1+i$，$w(0)=0$

Sol. (1) 根据保对称性，$w(-i)=1-i$，根据保交比性可求.

(2) 设所求变换 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，$a,b,c,d\in\mathbb{R}$

由 $w(0)=0$，$b=0$，$w=\dfrac{az}{cz+d}=\dfrac{z}{ez+f}$，$e,f\in\mathbb{R}$

再由 $w(i)=1+i$，$1+i=\dfrac{i}{ei+f}\Rightarrow e=f=\dfrac{1}{2}$

所求变换 $w=\dfrac{2z}{z+1}$

2. 上半平面到单位圆的线性变换

已知上半平面中一点 a $(\operatorname{Im} a>0)$ 变为 $w=0$ $(\bar{a}\to\infty)$

所求变换具有形式 $w=k\cdot\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$，由 $|w(0)|=1$ 知 $k=e^{i\alpha}$，其中 α 为待求参数.

若 $\arg w'(a)=\beta$ 已知，则 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\beta$

Pf. $w'(z)=e^{i\alpha}\cdot\frac{(z-\bar{a})-(z-a)}{(z-\bar{a})^2}=e^{i\alpha}\frac{a-\bar{a}}{(z-\bar{a})^2}$

$w'(a)=e^{i\alpha}\cdot\frac{1}{a-\bar{a}}$

$\beta=\arg w'(a)=\alpha+\arg\left(\frac{1}{a-\bar{a}}\right)=\alpha+\arg\left(\frac{1}{i}\right)=\alpha-\frac{\pi}{2}.$

例2 确定将 $z=\frac{i}{2}$ 变为 $w=0$ 且将上半平面变为单位圆的线性变换，若 $\arg w'(\frac{i}{2})=\frac{\pi}{2}$.

$w=e^{\pi i}\cdot\frac{z-\frac{i}{2}}{z+\frac{i}{2}}=-\frac{z-\frac{i}{2}}{z+\frac{i}{2}}$

3. 单位圆 $|z|<1$ 到 $|w|<1$ 的线性变换

已知 $|a|<1$ 且 $w(a)=0$, $(\frac{1}{\bar{a}}\to\infty)$

所求变换 $w=k\cdot\frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}}\overset{\text{记为}}{=}k_1\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

再由 $|w(1)|=1$, $|k_1|=1$, 所求变换为 $w=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

若 $\arg w'(a)=\beta$ 已知，则 $\alpha=\beta$.

例3 若单位圆 $|z|<1$ 到 $|w|<1$ 的线性变换 $w=L(z)$ 满足 $L(\frac{1}{2})=0$，且 $\arg w'(\frac{1}{2})=\pi$，则 $L(z)=e^{i\pi}\cdot\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=-\frac{2z-1}{2-z}$

二、~~其他~~常见保形变换举例

1. $w=e^z$ 与 $w=\ln z$ 所成变换

$w=e^z$ 在单叶性区域 $0<\mathrm{Im}\,z<2\pi$ 内保形，其像区域为去掉正实轴.

一般地，z 平面上带形域 $0<\mathrm{Im}\,z<y_0$ 变为角形域 $0<\arg w<y_0$

特别地，上半平面上宽度为 π 的带形域 $0<\mathrm{Im}\,z<\pi$ 变为上半平面.

同理，$w=\ln z$ 将角形域变为带形域（主值支）

例4 带形域 $0<\mathrm{Im}\,z<\pi$ 变为单位圆 $|w|<1$ 的保形变换，满足 $w(\frac{\pi i}{2})=0$，且 $\arg w'(\frac{\pi i}{2})=\pi$.

Sol. (1) $w_1 = e^z$ 变为上半平面 $\mathrm{Im}\, w_1 > 0$, $\frac{\pi i}{2} \to i$

(2) $w = e^{i\alpha}\frac{w_1 - i}{w_1 + i}$ 将上半平面变为单位圆, $\alpha = \pi \cancel{+\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}}$

复合有: $w = e^{i\alpha}\cdot\frac{e^z - i}{e^z + i} = -\frac{e^z - i}{e^z + i}$

2. 幂函数 $w = z^n$ 与 $w = z^{\frac{1}{n}}$ 所成变换 $(n \in N)$

$w = z^{\frac{1}{n}}$ 单叶性区域: $0 < \arg z < 2\pi$, 变为 $0 < \arg w < \frac{2\pi}{n}$

$w = z^n$ 将 $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ 变为 $0 < \arg w < 2\pi$

例 5 求将角域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ 变为上半平面的保形变换 $w = w(z)$, 使 $w(e^{\frac{\pi}{4}i}) = 1 + i$ 且 $w(0) = 0$

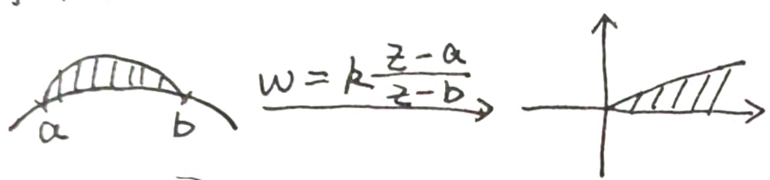
Sol. (1) $w_1 = z^2$ 变为上半平面, $w_1(e^{\frac{\pi}{4}i}) = i$, $w_1(0) = 0$

(2) 将 $i \to 1+i$, $0 \to 0$ 的上半平面到上半平面变换: $w = \frac{2w_1}{w_1 + 1}$

复合有 $w = \frac{2z^2}{z^2 + 1}$

三、其他保形变换举例

两个相交的圆弧所成单连域变为上半平面或单位圆



然后用幂函数变为上半平面

例 6 求一个将上半单位圆 $|z| < 1$ 且 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 变为上半平面的保形变换.

Sol. (1) 线性变换 $w_1 = \frac{-(z+1)}{z-1}$ 将上半单位圆变为 $0 < \arg w_1 < \frac{\pi}{2}$

(2) 所求变换 $w = w_1^2 = \left(-\frac{z+1}{z-1}\right)^2$